Definizione 4.16. Dati due anelli R_1 e R_2 si dice *prodotto degli anelli R_1 e R_2* l'insieme

$$R_1 \times R_2 = \{(r, s) \mid r \in R_1 \text{ e } s \in R_2\}.$$

Dotato dell'addizione definita da

$$(r, s) + (r', s') = (r + r', s + s')$$

e della moltiplicazione definita da

$$(r, s) \cdot (r', s') = (r \cdot r', s \cdot s')$$

l'insieme $R_1 \times R_2$ è un anello.

Corollario 4.2. *Siano n, m due interi coprimi.*

(i) C'è un isomorfismo di anelli

$$\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

(ii) C'è un isomorfismo di gruppi

$$(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})^* \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*.$$

(iii) Per interi positivi e coprimi n, m si ha

$$\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$$

dove φ è la funzione di Eulero.

Dimostrazione. □

Corollario 4.3. *Sia $n \in \mathbb{Z}$, n positivo. Allora la funzione di Eulero è data da*

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

con p che varia tra i numeri primi che dividono n.

Dimostrazione. □

4.5 Campi quoziente

Dato un dominio di integrità R, è possibile costruire il *campo quoziente* $Q(R)$ di R, il quale contiene l'anello R ed è generato da R perché ogni elemento di $Q(R)$ ha la forma xy^{-1} per certi $x, y \in R$, cioè si ottiene moltiplicando un elemento di R per l'inverso di un altro elemento, al variare arbitrariamente di entrambi in R.

☞ Ricordiamo che un dominio (R in questo caso) è un anello non banale commutativo e con divisione, privo di divisori dello zero: ammette quindi inverso per ogni suo elemento.