Disuguaglianza di Bessel. *Sia H uno spazio di Hilbert e φ_i un sistema ortonormale di H. Per ogni $f \in H$ si ha*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \hat{f}(i) \right|^2 \leq \|f\|_H^2 .$$

Dimostrazione. Si applica il teorema della migliore approssimazione. □

Teorema 2.3. *Sia H uno spazio di Hilbert e φ_i un sistema ortonormale di H. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *φ_i è un sistema ortonormale completo di X;*
2. *per ogni $f \in H$ si ha che*

$$\|f\|_X^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \hat{f}(i) \right|^2 = \left\| \hat{f} \right\|_{\ell^2}^2 \quad \textit{(uguaglianza di Bessel)};$$

3. *per ogni $f \in H$ si ha*

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{f}(i)\varphi(i);$$

4. *per ogni $f, g \in H$*

$$\left(f, g\right)_H = \left(\hat{f}, \hat{g}\right)_{\ell^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{f}(i)\hat{g}(i) \quad \textit{(identità di Parseval.)}$$

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che 2 implica 1. Se $\hat{f}(i) = 0$ allora $\hat{f} = 0$, quindi $\|f\|_{\ell^2}^2 = 0$ e per l'uguaglianza di Bessel si ha $\|f\|_H^2 = 0$, pertanto $f = 0$; dire che $\hat{f}(i) = 0$ implica $f = 0$ significa dire che il sistema ortonormale è completo, quindi si è dimostrata la 1.
Dimostriamo che 1 implica 3. Consideriamo

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{f}(i)\varphi_i \in H;$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$ si ha

$$(g, \varphi_i) = \hat{g}(j) = \hat{f}(j).$$

Osserviamo che un sistema ortonormale $\{\varphi_i\}$ è completo se

$$(f, \varphi_i) = \hat{f}(i) = 0 \quad \text{per ogni } i$$

implica $f = 0$, quindi se e solo se –date f e g– la relazione $\hat{f}(i) = \hat{g}(i)$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ implica $g = f$. Poiché per ipotesi il sistema è completo, si ha $f = g$ e quindi la tesi

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{f}(i)\varphi_i .$$