CAPITOLO

2

Meccanica lagrangiana

Se fossi stato ricco, probabilmente non mi sarei dedicato alla matematica.

Joseph-Louis Lagrange

2.1 Lavoro virtuale e vincoli a lavoro virtuale nullo

Possiamo classificare gli spostamenti di un sistema in *spostamenti possibili*, che sono compatibili con i vincoli all'istante t considerato, e *spostamenti virtuali*, compatibili con i vincoli "congelati" all'istante t. Analiticamente, in caso di vincolo olonomo bilatero, ossia rappresentato dalla relazione

$$f_\alpha(\mathbf{r}_i, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots, k)$$

uno spostamento possibile è tradotto dalla relazione

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \sum_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{i} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$$

Uno spostamento elementare del sistema è quindi dato da

$$d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i\, dt$$

Uno spostamento virtuale, invece, soddisfa una relazione del tipo

$$\sum \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_i}\delta\mathbf{r}_i = 0$$

dato che l'istante di tempo è fissato.

2.2 Equilibrio per un sistema di particelle

Si supponga che un sistema sia in equilibrio, ossia che la forza totale agente su una particella sia nulla; ciò si indica con $\mathbf{F_i} = \mathbf{0}$. Se si verifica tale ipotesi, è nullo anche il prodotto scalare $\mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i$ e quindi anche per la sommatoria estesa alle particelle sarà

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{2.1}$$

Decomponendo $\mathbf{F_i}$ nella somma di forze attive e vincolari si ha la scrittura

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i \tag{2.2}$$

quindi la (2.1) si trasforma in

$$\sum_i \left(\mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_i \right) + \sum_i \left(\mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i \right) = 0$$

2.3 Principio dei lavori virtuali

Prendiamo in esame i sistemi in cui il lavoro delle forze vincolari è nullo (ciò vale per il corpo rigido e per un gran numero di sistemi vincolati). Condizione necessaria e sufficiente perché un tale sistema sia in equilibrio è che il lavoro delle forze attive sia nullo, cioè

$$\sum_i \left(\mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_i \right) = 0 \tag{2.3}$$

espressione conosciuta come *principio dei lavori virtuali*.

2.4 Principio di D'Alembert

I coefficienti dei $\delta\mathbf{r}_i$ presenti nell'equazione (2.3) non possono essere automaticamente posti uguali a zero, cioè in generale si ha $\mathbf{F}^{(a)} \neq \mathbf{0}$, dato che i $\delta\mathbf{r}_i$ non sono copmletamente indipendenti, bensì legati dalle condizioni di vincolo. Quello che è l'obiettivo del procedimento di calcolo sarà l'espressione del principio dei lavori virtuali in una forma che contiene gli spostamenti virtuali delle coordinate generalizzate q_i, ed essi saranno spostamenti effettivamente indipendenti tra loro. C'è da osservare, infine, che l'equazione (2.3) non contiene le forze vincolari $\mathbf{f}_i$ ma è applicabile solo al caso statico; a noi interessa invece un'espressione analoga alla (2.3) in cui non compaiano le $\mathbf{f}_i$ e che sia valida per un generico moto del sistema, e per arrivare a tal fine si usa un metodo proposto da Jacob Bernoulli e sviluppato in seguito da Jean Le Rond D'Alembert.
Si parta dall'equazione del moto

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$$

ossia

$$\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0}$$

la quale esprime che le particelle del sistema devono essere in equilibrio sotto l'azione di una forza efficace opposta $-\dot{\mathbf{p}}_i$. La (2.1) si può scrivere, sotto queste ipotesi, come

$$\sum_i \left(\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i \right) \cdot \delta\mathbf{r}_i = \mathbf{0}$$

e, separando i contributi delle forze attive e di quelle vincolari, diventa

$$\sum_i \left(\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$$

Considerando solo i sistemi per cui il lavoro virtuale è nullo, si ottiene

$$\sum_i \left(\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{0} \tag{2.4}$$

cioè il *principio di D'Alembert*.

2.5 Equazioni di Lagrange

Nella formula (2.4) non compaiono forze vincolari, però non sono ancora presenti le coordinate generalizzate, sicuramente indipendenti fra loro nel caso di vincoli olonomi; occorre allora passare dalle coordinate $\mathbf{r_i}$ alle coordinate generalizzate q_j. Operiamo, a tal fine, la trasformazione

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \ldots, q_n, t)$$

Applicando la regola di derivazione a catena per le funzioni composte, la velocità in funzione delle velocità generalizzate $\dot{q}_j$ si scrive come

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \tag{2.5}$$

e analogamente lo spostamento virtuale $\delta \mathbf{r}_i$ può essere scritto in termini degli spostamenti virtuali generalizzati δq_i

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{2.6}$$

Servendosi allora della (2.6) e sostituendo in (2.1) , il lavoro virtuale della forza attiva in termini di coordinate generalizzate è dato da

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i,j} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j$$

dove si sono indicate con

$$Q_j = \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

le *componenti della forza generalizzata*. Esaminiamo ora il secondo addendo del principio di D'Alembert (2.4), cioè

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$$

ed esprimiamo $\delta \mathbf{r}_i$ in base a (2.6), cioè in termini di spostamenti virtuali generalizzati; si ottiene

$$\sum_{i,j} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$